Instituut voor Theoretische Fysica
der Rijksuniversiteit Utrecht

oktober 1973

Werkkollege Kwantumfysika 1973-1974

Opg. 1.

a) Beschouw de verschuivingswet van Wien. Veronderstel dat we een zwart lichaam hebben dat straalt bij een temperatuur van 2500 K. Bereken de golflengte in Å waarvoor de stralingsintensiteit maximaal is. Ligt deze golflengte in het zichtbare deel van het spektrum ?

b) Leidt de verschuivingswet van Wien af uit de stralingswet van Planck :

$$E(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} .$$

c) Laat met behulp van Planck's stralingswet zien dat de totale snelheid waarmee straling door een zwart lichaam wordt uitgezonden, dus geïntegreerd over alle golflengten, evenredig is met T^4.

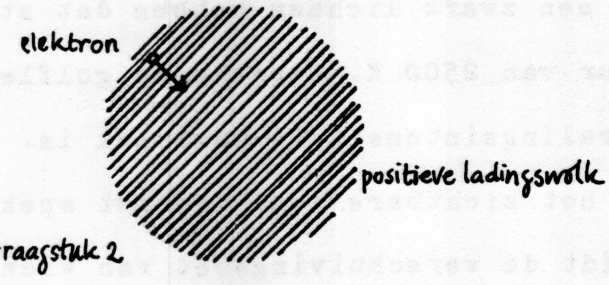
Opg. 2.

Thomson's model voor het H-atoom bestaat uit een lading + e homogeen uitgesmeerd over een bol met straal R en een elektron met lading - e dat binnen deze bol oscilleert.

a) Laat zien dat het elektron een harmonische beweging uitvoert.

b) Bereken de frekwentie van de oscillatie en vergelijk deze met de frekwentie van zichtbaar licht.
Neem voor R de straal van de eerste Bohrse baan.

Werkkollege Kwantumfysika 1973-1974 (vervolg opg. 2)



figuur bij vraagstuk 2

Opg. 3.

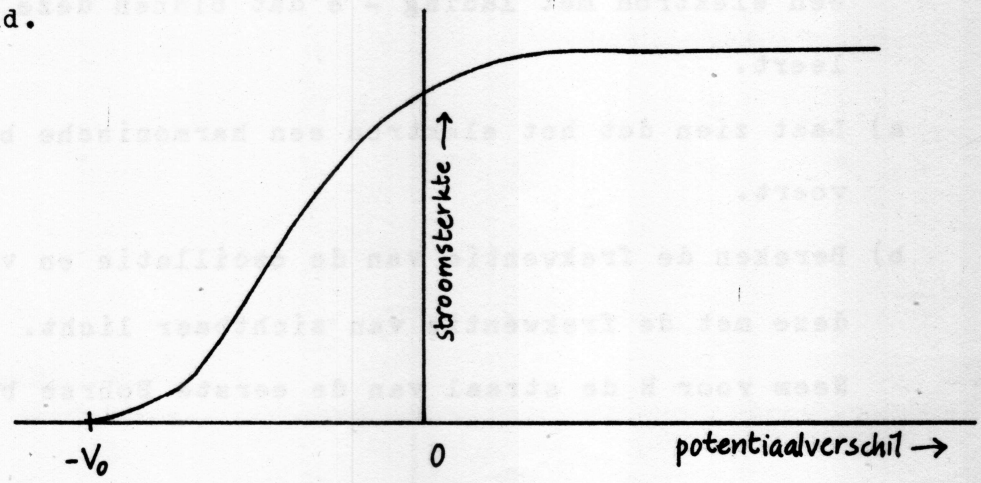
We bekijken een experiment met het fotoëlektrisch effekt. Een K-kathode wordt bestraald met geel licht van de Na lijn 5890 Å en UV straling met λ = 2400 Å afkomstig van een Hg boog. Men vindt rempotentialen V_o van 0,4 en 3,4 respektievelijk. Bereken

a) de konstante van Planck;

b) de uittreepotentiaal (work function) van K;

c) de minimumfrekwentie van de elektromagnetische straling vereist om de elektronen te emitteren.

De lichtsnelheid en elektronlading worden bekend verondersteld.



Werkkollege Kwantumfysika 1973-1974

Opg. 4.

Een methode ter bepaling van $^e/m$. (J.J. Thomson).

Een bundel deeltjes (bijv. kanaalstralen) met lading e, massa m en snelheid v doorloopt een gebied ter lengte l_1 waarin een homogeen elektrisch veld E hoort. Het elektrische veld staat loodrecht op de snelheid der deeltjes.

a) Gesteld dat de snelheidsverandering klein is ten opzichte van v, wat is dan de hoek θ_E waarover de bundel wordt afgebogen ?

Deze hoek zouden we kunnen meten, maar om $^e/m$ te vinden moeten we v nog weten te elimineren. Laat de bundel daarom over een lengte l_2 een homogeen magneetveld B loodrecht op de bundelrichting doorlopen.

b) Als de relatieve snelheidsverandering weer klein is, wat is dan de hoek θ_B waarover de bundel door het B veld wordt afgebogen?

Een realistische bundel bevat deeltjes met verschillende snelheden v. Dit verschil in snelheden kan zijn ontstaan doordat de deeltjes zijn versneld in verschillende punten tussen de elektroden, en doordat ze verschillende hoeveelheden energie hebben overgedragen aan gasmolekulen ten gevolge van botsingen. J.J. Thomson loste dit probleem op door het E en B veld parallel te nemen, zodat de afwijkingen θ_E en θ_B loodrecht op elkaar staan. Deze afwijkingen kunnen worden gemeten als X en Y koördinaten op een scherm of een fotografische plaat. Deel-

Werkkollege Kwantumfysika 1973-1974 (vervolg opg. 4)

tjes met verschillende snelheden komen dan op verschillende plaatsen in dat vlak terecht.

c) Laat zien dat er op het scherm of de fotografische plaat een parabool zichtbaar wordt en geef aan hoe $^{e}/m$ uit de meetresultaten kan worden bepaald.

Werkkollege Kwantumfysika okt./nov. 1973

Opg. 5

Bereken het aantal molekulen per cm^2 als 1 g water uniform over het aardoppervlak zou worden uitgespreid.

R_{aarde} = 6400 km.

Opg. 6

In 1903 onderzochten P. Curie en Laborde de warmteafgifte van radium. Ze vonden dat 1 gram zuiver radium (we weten nu dat het om de isotoop $_{88}Ra^{226}$ gaat) ongeveer 100 cal/uur geeft. Bereken hiermee en met de bekende halfwaarde tijd (1622 jaar) de benaderde energie in MeV van de uitgezonden α-deeltjes.
In het experiment van Curie en Laborde werden deze deeltjes afgeremd binnen de bron en de kalorimeter, en hun kinetische energie werd daar in warmte omgezet.

Opg. 7

Een van de lijnen van het H-spektrum heeft een golflengte van 4861,3 Å. Harold Urey ontdekte hier vlak naast, op 4860,0 Å een veel zwakkere lijn. De verklaring hiervan is dat waterstof niet isotopisch zuiver is maar een mengsel van $_1H^1$ en $_1H^2$ = D. De laatste isotoop, die 0,015% van het natuurlijke waterstof uitmaakt, is verantwoordelijk voor de genoemde zwakke lijn. Bij de berekening van het H-spektrum kan men in nulde orde benadering de beweging van de kern verwaarlozen (of m.a.w. de massa van de kern ∞ nemen). We willen nu proberen de eindigheid van de kernmassa in rekening te brengen tot op eerste orde in $\frac{m}{M}$, met m de elektron- en M de kernmassa.

a) Bereken m.b.v. de Bohr theorie de energieniveaux van het H-atoom tot op eerste orde in $\frac{m}{M}$.

b) Bereken m.b.v. de twee gegeven golflengten de verhouding tussen de massa's van het deuteron (D) en het

Werkkollege Kwantumfysika okt./nov. 1973 (verv. opg. 7)

proton; (Een tabel van kernmassa's gaf $\frac{M_D}{M_P} = 2{,}00$).

Opg. 8

Beschouw de centrale botsing van een α-deeltje met een kern (ladingsgetal Z en massagetal A). De straal van een kern vindt men bij benadering uit de formule $r \approx r_o A^{1/3}$ met $r_o = 1{,}2.10^{-13}$ cm.

Bereken nu als funktie van A de energie in MeV die het α-deeltje moet hebben om juist het oppervlak van de kern te bereiken. Neem voor het gemak aan dat de kern in rust blijft, en dat A = 2Z.

Als het α-deeltje het oppervlak van de kern niet kan bereiken zal het niet onder de invloed van de kernkrachten komen en zal de verstrooiing uitsluitend door de elektrostatische wisselwerking worden bepaald. De hier berekende energie is dus een benadering voor de karakteristieke energie waarboven de verstrooiing zal beginnen af te wijken van de Coulomb verstrooiing (dat is de verstrooiing onder invloed van elektrostatische krachten).

Werkkollege Kwantumfysica 1973-1974

Opg. 9

Het terugstoot effekt bij de uitzending van een foton.
Het Mössbauer effekt.

Stel een atoom of kern met massa M' vervalt onder uitzending van een foton. Na de emissie van het foton is de massa van het deeltje M. Het uitgezonden foton wordt waargenomen in het inertiaal-stelsel waarin het deeltje aanvankelijk in rust was. In dat stelsel is de frekwentie van het foton ω.

Definieer ω_o door $\hbar\omega_o = (M'-M)c^2$.

a) Laat zien dat

$$\omega = \frac{M' + M}{2M'}\,\omega_o = \omega_o\left[1 - \frac{\hbar\omega_o}{2M'c^2}\right].$$

b) Bereken $(\omega_o - \omega)/\omega$ voor de 5890 Å lijn van Na. Bereken deze verhouding ook voor de 113 keV γ straling uitgezonden door de hafnium isotoop ${}_{72}Hf^{177}$.

Dit is het terugstoot effekt voor vrije deeltjes. De lage energie γ emissie van kernen van atomen die in een kristalrooster zijn ingebed blijkt voor een deel terugstoot-loos te zijn. Dit staat bekend als het Mössbauer effekt. Bij een vaste stof kun je een niet verschoven scherpe γ lijn tegen een brede verschoven achtergrond zien. De relatieve sterkte is temperatuur afhankelijk: de fraktie onverschoven straling neemt toe als de temperatuur lager wordt. De breedte van de scherpe lijn is onafhankelijk van de temperatuur.

De verschoven straling ontstaat wanneer bij de emissie van een γ kwant het terugstoot effekt optreedt. Nu echter is het niet het individuele emitterende atoom dat terugstoot, maar het hele kristalrooster. De emissie van een γ kwant kan op deze wijze roostertrillingen (zgn. fononen) exciteren.

Opg. 10

Beschouw een He gas op kamertemperatuur. Dit is een 1-atomig gas. De gemiddelde kinetische energie van een He

Werkkollege Kwantumfysica 1973-1974 (vervolg opg. 10)

atoom in een gas van temperatuur T wordt gegeven door $E_{kin} = \frac{3}{2}kT$. Uit deze relatie kan de middelbare snelheid van de He atomen worden afgeleid.

a) Bereken de middelbare snelheid van de He atomen (in cm/sek).

b) Bereken de Broglie golflengte λ_B korresponderend met deze snelheid in cm. Vergelijk deze golflengte met de gemiddelde onderlinge afstand tussen de atomen in het gas. Neem aan dat de druk 1 atmosfeer is.
Het valt te verwachten dat kwantumeffekten een rol kunnen gaan spelen wanneer λ_B groter is dan de gemiddelde onderlinge afstand. De klassieke beschrijving zal goed zijn als λ_B kleiner is dan die afstand.

c) De dichtheid van vloeibaar He is 0,15 g/cm^3. Onder atmosferische druk blijft deze stof vloeibaar tot de laagste bereikbare temperaturen. Bereken in analogie met b) de verhouding tussen λ_B en de gemiddelde onderlinge afstand bij een temperatuur van 0,01 K.
1 amu = $1{,}67.10^{-24}$ kg; k = $1{,}38.10^{-16}$ erg/K; h, het getal van Avogadro en het volume van 1 mol gas onder normale temperatuur en druk worden bekend verondersteld.

Opg. 11

Veronderstel dat een elektron-positron paar annihileert in drie gamma stralen. We nemen aan dat het elektron en positron bijna in rust zijn. Als we nu naar één van de γ stralen kijken in het ruststelsel van het elektron-positron paar, wat zijn dan de mogelijke energiën van dit foton?

Werkkollege Kwantumfysika 1973-1974

Opg. 12

Bekijk een deeltje met massa m dat een 1-dimensionale beweging, plaatskoordinant x, uitvoert in de potentiaal $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Klassiek is de beweging een harmonische oscillatie rondom het punt x = 0 . De impuls van het deeltje noemen we p. De "harmonische oscillator" is dan gedefinieerd door de energiefunktie:

$$E(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 .$$

Geef nu met behulp van de onzekerheidsrelaties een schatting voor de energie van de grondtoestand van dit systeem.

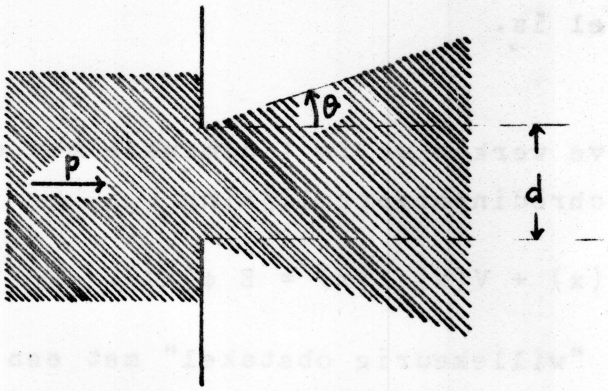
Opg. 13

In de klassieke mechanika kan het nulpunt van de potentiële energie willekeurig worden gekozen. Toevoeging van een konstante potentiaal verandert de beweging van het systeem niet.
Hoe veranderen golffunktie en energie als we in de Schrödingervergelijking aan de gegeven potentiaal v(x) een konstante potentiaal toevoegen ?

Werkkollege Kwantumfysica 1973-1974

Opg. 14

Een bundel elektronen met impuls p valt loodrecht in op een spleet met breedte d. Bepaal de hoekspreiding θ.



Opg. 15

Invariantie onder tijdomkeer.

Tijdafhankelijke Schrödingervergelijking:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \qquad (1)$$

Tijdonafhankelijke Schrödingervergelijking:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_E(\vec{r}) + V(\vec{r})\,\phi_E(\vec{r}) = E\,\phi_E(\vec{r}) \qquad (2)$$

a) Veronderstel dat $\psi(\vec{r},t)$ een oplossing van de tijdafhankelijke SV(1) is en dat $V(\vec{r})$ reëel is. Laat zien dat dan ook $\psi^*(\vec{r},-t)$ een oplossing van de vergelijking is. Deze oplossing wordt wel tijdomgekeerde oplossing (time reversed solution) van de SV ten opzichte van $\psi(\vec{r},t)$ genoemd. Dat met $\psi(\vec{r},t)$ ook $\psi^*(\vec{r},-t)$ oplossing van (1) is heet invariantie onder tijdomkeer. Dit is dus een algemene eigenschap van de Schrödingervergelijking.

b) Bewijs dat uit deze eigenschap volgt dat met $\phi_E(\vec{r})$ ook $\phi_E^*(\vec{r})$ een oplossing van de tijdonafhankelijke SV (2) bij energie E is.

Als er bij een bepaalde energie E meerdere onafhankelijke oplossingen van (2) zijn heet het energieniveau E ontaard.

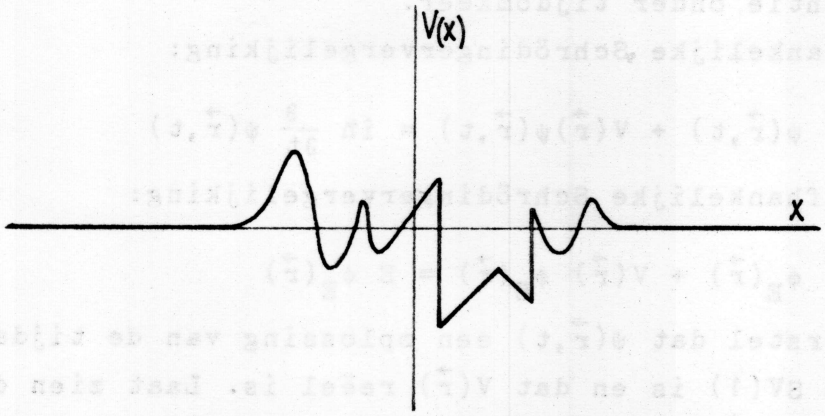
c) Ga na dat als $\phi_E(\vec{r})$ oplossing is van (2) bij een niet ontaarde E deze golffunktie reëel moet zijn (afgezien van een konstante komplexe faktor).
Laat zien dat in geval E ontaard is de oplossingen van (2) reëel gekozen kunnen worden, onder de voorwaarde dat $V(\vec{r})$ reëel is.

Opg. 16

In deze opgave werken we in 1 dimensie met de tijdonafhankelijke Schrödingervergelijking

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + V(x)\,\phi(x) = E\,\phi(x)\,. \qquad \text{(SV)}$$

Beschouw een "willekeurig obstakel" met een potentiaal bijv. van de vorm



We veronderstellen dat V(x) alleen ongelijk nul is in een begrensd gebied.
Neem een deeltje dat van links invalt. Voor voldoend grote negatieve waarden van x heeft de oplossing van (SV) de gedaante

$$\phi(x) = e^{ikx} + A\,e^{-ikx}$$

en voor voldoend grote x ziet de golffunktie eruit als

$$\phi(x) = B\,e^{ikx}\,.$$

De konstanten A en B vind je door expliciet oplossen van de differentiaalvergelijking (SV) met V(x) van de figuur. We hebben op het kollege gezien dat $|A|^2$ en $|B|^2$ kunnen worden geïnterpreteerd als reflektie resp. transmissiekoefficient. Voor deze interpretatie is

Werkkollege Kwantumfysika 1973-1974 (vervolg opg. 16)

echter noodzakelijk dat $|A|^2 + |B|^2 = 1$ (waarom?). Bewijs deze relatie voor V(x) van het beschouwde (barrier-)type (maar overigens willekeurig).
Aanwijzing. Bekijk de funktie $\Phi(x)$ gedefinieerd door

$$\Phi(x) = \phi^*(x)\,\frac{d\phi(x)}{dx} - \phi(x)\,\frac{d\phi^*(x)}{dx},$$

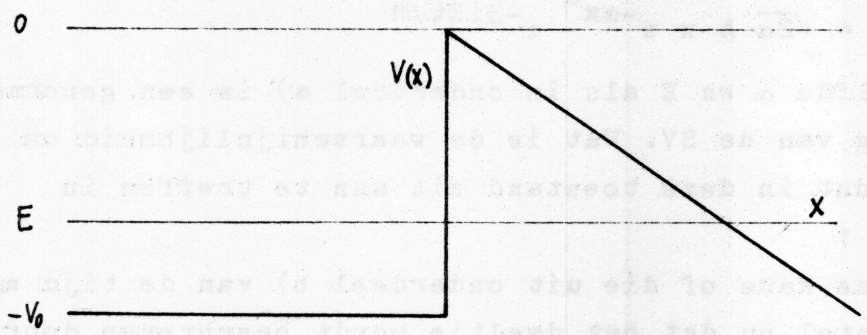
en laat zien dat $\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0$ als $\phi(x)$ aan de (SV) voldoet.

Opg. 17

a) Bereken met behulp van de benaderde uitdrukking

$$T \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{2m(V(x) - E)}\right]$$

de transmissie koefficient van elektronen door het oppervlak van een metaal in een sterk elektrisch veld F. De potentiaal wordt gegeven door de figuur



Ga na wanneer deze uitdrukking voor T een goede benadering geeft voor het tunneleffekt bij de gegeven potentiaal.

b) In opgave 3 hebben we met het fotoëlektrisch effekt de uittreepotentiaal van K bepaald op 1,7 V. Bereken nu T voor elektronen met energiën E = -0,5 , -1,0 en -1,5 eV, en in een veld $F = 10^9$ V/m.

Opg. 18

De Schrödingervergelijking (SV) voor een deeltje met massa m in een 1-dimensionale harmonische oscillator potentiaal is

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x,t) .$$

a) Vindt door substitutie in de SV de waarden van α en E, uitgedrukt in m, $\hbar$ en ω, waarvoor

$$\phi_o(x,t) = A\, e^{-\alpha x^2}\, e^{-iEt/\hbar}$$

een oplossing is van deze vergelijking.

b) Wat is de kans om een deeltje dat zich in de toestdnd ϕ_o bevindt aan te treffen in het infinitesimale interval $(x, x+dx)$?

Wat is de dimensie van A ?

Bereken de verwachtingswaarde van x^2 in de toestand ϕ_o, dwz. het gemiddelde van x^2 over de kwantummechanische kansverdeling . Wat is de verwachtingswaarde van x ?

c) Ook de funktie

$$\phi_1(x,t) = \sqrt{2\alpha}\, A\, x\, e^{-\alpha x^2}\, e^{-3iEt/\hbar}$$

met dezelfde α en E als in onderdeel a) is een genormeerde oplossing van de SV. Wat is de waarschijnlijkheid om een deeltje dat in deze toestand zit aan te treffen in $(x, x+dx)$?

Hangt deze kans of die uit onderdeel b) van de tijd af ?

d) Veronderstel nu dat het deeltje wordt beschreven door de genormeerde golffunktie.

$$f(x,t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\phi_o(x,t) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\phi_1(x,t) .$$

Laat zien dat de kans om het deeltje in het interval $(x, x+dx)$ aan te treffen een periodieke funktie van t is. Bepaal de periode.

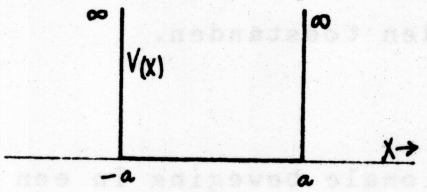
$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{2}(n+1)}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}(n+1))$$

$$\Gamma(1) = 1 \;,\; \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \text{ en } \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) .$$

Werkkollege Kwantumfysika 1973-74

Opg. 19

We willen de beweging van een deeltje in de onderstaande 1-dimensionale potentiaal onderzoeken.

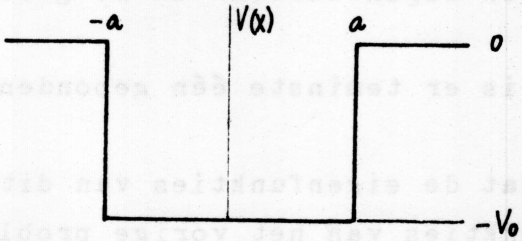


Bereken de oplossing $\psi(x,t)$ van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking die voldoet aan de beginvoorwaarde

$$\psi(x,0) = \sqrt{2/a}\,\left[\sin\left\{\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{a}+1\right)\right\}\cos\left\{\frac{\pi}{4}\left(\frac{3x}{a}-1\right)\right\}\right].$$

Opg. 20 A

Beschouw een deeltje in een 1-dimensionale potentiaalput waarvan de wanden een eindige hoogte hebben



Bepaal de golffunkties van de gebonden toestanden en geef de relaties voor de daarbij behorende energiën.
Laat daartoe eerst zien dat bij een symmetrische potentiaal de golffunkties altijd even of oneven mogen worden gekozen.
De zgn. transcendente relaties voor de energie-eigenwaarden die je hier hebt gevonden kunnen grafisch worden opgelost. Voer daartoe de nieuwe variabelen ξ, η en β in volgens

$$\xi = k'a\ ,\ \eta = \cot\text{an}\ \xi \text{ en } \beta = \frac{\sqrt{2mV_o}}{\hbar}\,a\ ,$$

waar $\hbar k' = \sqrt{2m(E+V_o)}$.

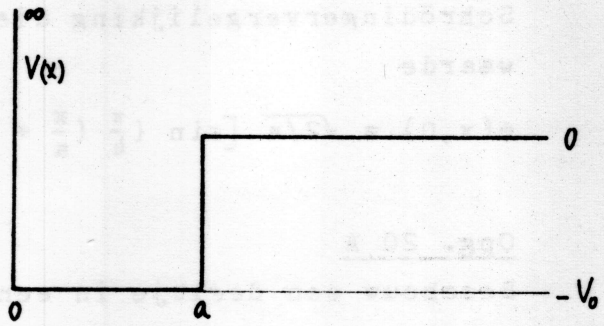
Schrijf de transcendente vergelijkingen in deze variabelen.

Werkkollege Kwantumfysika 1973-74 (vervolg opg. 20 A)

Teken een grafiek voor $\beta = 4$ en laat zien hoe de energie-eigenwaarden voor de gebonden toestanden hieruit bepaald kunnen worden.
Vind het totaal aantal gebonden toestanden.

Opg. 20 B

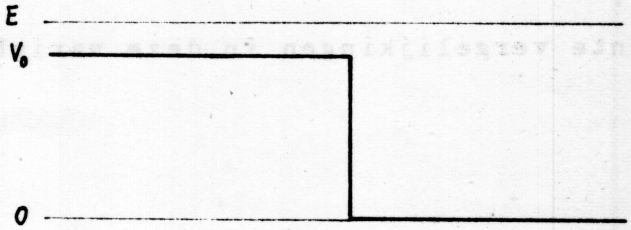
Nu beschouwen we de 1-dimensionale beweging in een put waarvan de ene wand ∞ hoog is, maar de ander een eindige hoogte heeft.



Bepaal de golffunkties en eigenwaarden van de gebonden toestanden.
Onder welke voorwaarde is er teminste één gebonden toestand?
Aanwijzing: Laat zien dat de eigenfunkties van dit probleem de oneven eigenfunkties van het vorige probleem zijn.
De potentiaal van B is een zeer grove benadering van een potentiaal die bestaat uit een aantrekkend stuk (de put) en een harde kern (∞ hoge wand). We hebben hier een aanwijzing ervoor gevonden dat zo'n potentiaal niet altijd tot een gebonden toestand aanleiding geeft.

Opg. 21

Een deeltje beweegt in 1 dimensie onder invloed van de onderstaande potentiaal. We veronderstellen dat het deeltje met massa m van links invalt met een energie $E>V_0$.



Werkkollege Kwantumfysika 1973-74 (vervolg opg. 21)

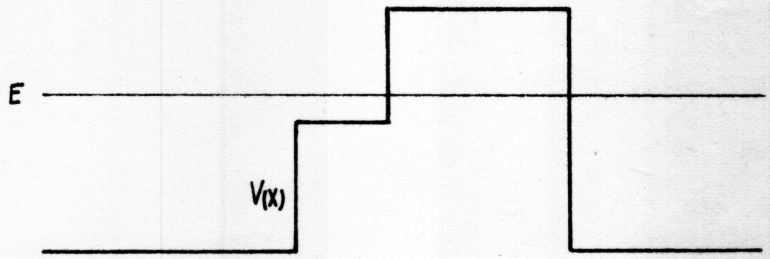
a) Konstrueer de oplossing $\psi(x)$ van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking.
b) Bereken de waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x) = |\psi(x)|^2$ en teken een grafiek van de funktie P.
c) Bereken de reflektiekoefficient voor het van links (!) invallende deeltje.

Opg. 22

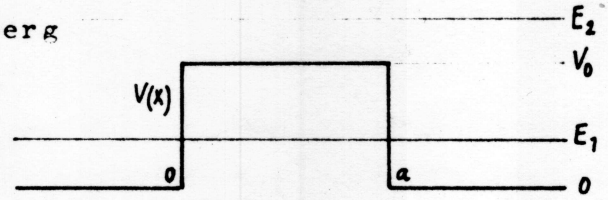
Bij de afleiding van de uitdrukking

$$T = \exp\left[- \frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(V(x)-E)} \right] \qquad (1)$$

voor de transmissie koefficient van een potentiaalberg werd aangenomen dat $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x)-E)}\, dx \gg \hbar$, waarbij de integralen lopen tussen de klassieke omkeerpunten.
Deze uitdrukkingen wekken de indruk dat het gedrag van de potentiaal in het gebied waar $V(x) < E$ niet van belang is voor T. Dat is echter in het geheel niet waar. We demonstreren dat aan de hand van het onderstaande potentiaal probleem.



a) Bereken de transmissie en reflektiekoefficient van de potentiaalberg



voor een energie $E_1 < V_o$.
b) Idem wanneer $E_2 > V_o$.
c) Bepaal nu de exakte transmissie en reflektiekoefficient van de samengestelde potentiaalberg V(x).
d) Bepaal de waarde van T met behulp van de benadering (1) en vergelijk die met het exakte resultaat.